EL PODER DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA

Francisco Bellot Rosado

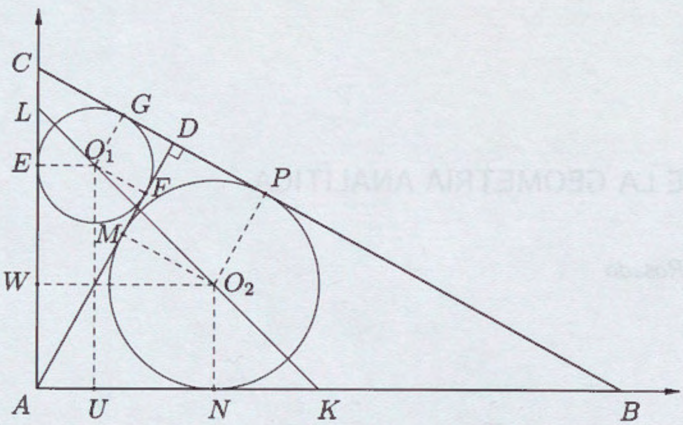
1. Introducció

En general, a l'Olimpíada Internacional no se solen proposar problemes de Geometria Analítica en el sentit més estricte; fins i tot es procura que els que proposen de Geometria no tinguin una solució analítica fàcilment visible. De fet, des de 1959 fins 1987, només quatre problemes (que s'inclouen al final sense solució) eren susceptibles d'aquest tractament. Però, malgrat tot, i des de 1988, tal com veurem als exemples següents, força vegades l'elecció adequada d'un sistema de referència permet resoldre, amb un bagatge teòric mínim, problemes que resolts sintèticament exigeixen un gran nombre de resultats clàssics, absolutament desconeguts per bona part dels nostres estudiants (i tal vegada, també, de bastants professors).

Problema 1. *(núm. 5, IMO 1988, proposat per Grècia.)* ABC és un triangle rectangle en A, i D és el peu de l'altura des de A. La recta que uneix els incentres dels triangles ABD i ACD talla AB en K i AC en L. Si S és l'àrea de ABC, i T la de AKL, demostreu que $S \geq 2T$.

Solució 1. Posem l'origen de coordenades en A, i suposem que $B(c, 0)$, $C(0, b)$. L'equació de BC és $bx + cy = bc$, i la de AD és $by = cx$. Tenim en compte que $a^2 = b^2 + c^2$, es calculen sense dificultat les coordenades dels incentres de ABD i ACD

$$\text{Incentre de } ABD: \ O_1\Big(\frac{cb(a+b)}{a(a+b+c)}, \frac{c^2b}{a(a+b+c)}\Big)$$
$$\text{Incentre de } ACD: \ O_2\Big(\frac{b^2c}{a(a+b+c)}, \frac{bc(a+c)}{a(a+b+c)}\Big)$$



que podem escriure-les més reduïdes utilitzant $2p = a + b + c$,

$$O_1\Big(\frac{cb(a+b)}{2ap}, \frac{c^2b}{2ap}\Big),$$

$$O_2\Big(\frac{b^2c}{2ap}, \frac{bc(a+c)}{2ap}\Big).$$

L'equació de la recta que passa per O_1O_2 és $2apy - c^2b = cb(a+b) - 2apx$ i calculant-ne les interseccions amb els eixos de coordenades, s'obté

$$K\Big(\frac{cb}{a}, 0\Big) \qquad L\Big(0, \frac{cb}{a}\Big).$$

Per tant, el triangle AKL és isòsceles (aquest és un resultat que va donar molts maldecaps a més d'un concursaut que en va voler donar una justificació per la via de la geometria sintètica).
Llavors, les àrees de AKL i de ABC són, respectivament,

$$T = \frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{a^2} \qquad S = \frac{1}{2}bc.$$

Hem de demostrar que

$$\frac{1}{2}bc \geq \frac{b^2c^2}{a^2} \Longleftrightarrow a^2 \geq 2bc \Longleftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

i, aquesta darrera desigualtat evidentment és certa.

Solució 2. Anomenem r_1 i r_2 els radis de les dues circumferències del problema, de centres respectius O_1 i O_2. Com que es pretén comparar les àrees de AKL i ABC, fóra convenient expressar les longituds de AK i AL en funció de certs elements del triangle ABC. Amb el mateix sistema de referència de la solució anterior, anomenem $h = AD$.

La primera coordenada de O_1 és, evidentment, r_1 i la segona de O_2 és r_2. D'acord amb les notacions de la figura 1, es veu immediatament que la segona coordenada de O_1 és $AE = AF = h - r_1$ i que la primera de O_2 és, per la mateixa raó, $h - r_2$. Així doncs,

$$O_1(r_1, h - r_1), \qquad O_2(h - r_2, r_2).$$

Aleshores el pendent de la recta O_1O_2 és

$$m = \frac{r_2 - (h - r_1)}{h - r_2 - r_1} = -1,$$

per tant els triangles O_2NK i O_1EL són isòsceles i

$$AK = h - r_2 + r_2 = h$$

$$AL = h - r_1 + r_1 = h$$

i AKL és isòsceles, $K(h, 0)$ i $L(0, h)$.

Però de la semblança entre els triangles ACD i ABC deduïm que

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{CD}{b} \Longrightarrow h = \frac{cb}{a},$$

I a partir d'aquí es continua com a la solució 1.

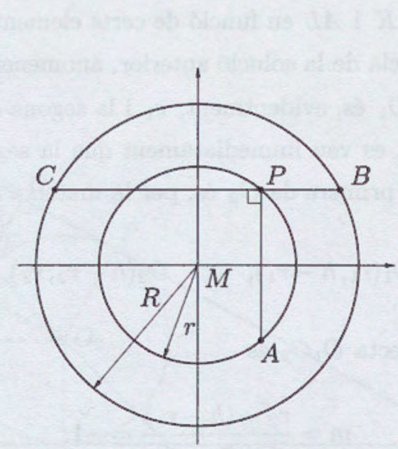
Problema 2. *(núm. 1, IMO 1988, proposat per Luxemburg.)* Es consideren dues circumferències coplanàries i concèntriques, de radis R i r $(R > r)$. Sigui P un punt fix de la circumferència petita i B un punt variable de la gran. La recta BP talla un altre cop la circumferència gran en C. La perpendicular l a BP per P torna a tallar la circumferència petita en A (si és tangent a la circumferència en P, llavors $A = P$).

a) Calculeu el conjunt de valors de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

b) Calculeu el lloc geomètric del punt mitjà de AB.

Solució. Escollim un sistema de referència amb origen en el centre de les dues circumferències, de manera que

$$B(x_2, y),\ P(x_1, y),\ C(-x_2, y),\ A(x_1, -y).$$



Llavors tenim

$$x_1^2 + y^2 = r^2, \qquad x_2^2 + y^2 = R^2,$$

i la suma buscada val

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 4x_2^2 + \left[(x_1 - x_2)^2 + 4y^2\right] + \left[(x_1 + x_2)^2 + 4y^2\right] =$$
$$= 2x_1^2 + 6x_2^2 + 2y^2 + 6y^2 = 2r^2 + 6R^2,$$

que és independent de la posició de B; per tant, l'únic valor que pren la suma en qüestió és $2r^2 + 6R^2$.

Sigui M l'origen i F el punt mitjà de PM. Llavors, $F\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ i el punt mitjà Q de ABté coordenades $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$.

Aleshores es té que

$$QF^2 = \frac{x_2^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

la qual cosa ens diu que el punt mitjà de AB pertany a la circumferència de radi $R/2$, amb centre en el punt mitjà de PM.

Considerant els casos en que M, A i B estan alineats es veu que els punts diametralment oposats d'aquesta circumferència formen part del conjunt de solucions. Per continuïtat s'obté el semicercle complet, i per simetria, el cercle complet.

Problema 3. *(núm. 2, IMO 1994, proposat per Austràlia i Armènia.)* ABC és un triangle isòsceles, amb $AB = AC$, que compleix:

a) M és el punt mitjà de BC, i O és el punt de la recta AM tal que OB és perpendicular al segment AB.

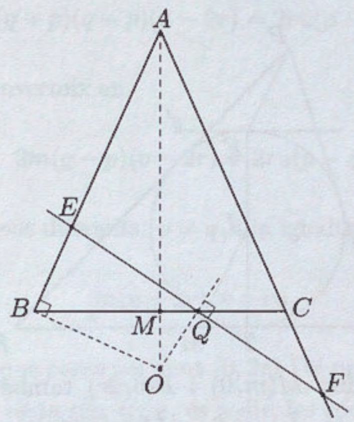
b) Q és un punt qualsevol del segment BC, diferent de B i de C.

c) E és a la recta AB i F a AC, de tal manera que E, Q i F són diferents i estan alineats.

Demostreu que OQ és perpendicular a EF si i només si $QE = QF$.

Solució. Prenem BC com a eix de les x, amb origen M; i suposem que

$$B(-1,0),\ C(1,0),\ A(0,a),\ Q(t,0) \text{ amb } -1 < t < 1.$$



En aquesta referència el punt O té coordenades $(0, -\frac{1}{a})$.

L'equació de EF és $y = m(x-t)$, i les coordenades de E i F són

$$E\Big(\frac{a+mt}{m-a}, \frac{am(1+t)}{m-a}\Big), \qquad F\Big(\frac{a+mt}{a+m}, \frac{am(1-t)}{a+m}\Big).$$

L'equació de OQ és

$$\frac{x}{t} - ay = 1,$$

així que la condició de perpendicularitat amb EF serà l'anul·lació del producte escalar dels seus respectius vectors normals $(1, -at)$ i $(m, -1)$. És a dir, $m + at = 0$.

Per altra banda, $QE = QF$ significa que Q és el punt mitjà de EF, que es tradueix en les següents igualtats en coordenades

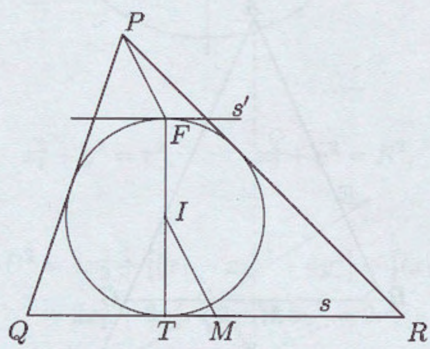
$$a(m+at) = 0, \qquad 2m + 2at = 0,$$

i per ser $a \neq 0$, ambdues equivalen a $m + at = 0$.

L'equivalència de les dues proposicions és evident.

Problema 4. *(núm. 4, IMO 1992, proposat per França.)* En el pla es consideren, una circumferència γ, una recta s tangent a γ, i un punt M de s. Determineu el conjunt dels punts P del pla que tenen la propietat següent: Existeixen dos punts Q i R en s, tals que M és el punt mitjà del segment QR i γ és el cercle inscrit en el triangle PQR.

Solució. Sigui I el centre de la circumferència; escollim el sistema de referència: la recta s com a eix d'abscisses, el punt de tangència T de s i γ com a origen i la recta IT com a eix d'ordenades.



En aquest sistema, $I(0,r)$ és fix; $M(m,0)$ i $F(0,2r)$ també ho són. Per tant, la recta IM, que té pendent $-r/m$, és igualment fixa. L'equació de γ és

$$x^2+y^2-2ry=0.$$

Sigui $P(u,v)$ el punt del qual es busca el lloc geomètric; si imposem les condicions del problema i si $Q(q,0)$ i $R(p,0)$, el fet que M hagi de ser el punt mitjà de QR es tradueix en

$$2m=p+q. \tag{1}$$

L'equació de PQ és $vx+(q-u)y=qv$; i la condició de tangència amb γ s'escriu

$$2rq(q-u)=(q+r)(q-r)v; \tag{2}$$

anàlogament, la condició de tangència de PR amb γ és

$$2rp(p-u)=(p+r)(p-r)v. \tag{3}$$

Per tant, el problema rau a eliminar entre (1), (2) i (3) els paràmetres variables p i q. Les igualtats (2) i (3) es poden escriure com

(2') $$r^2 v = q^2(v - 2r) + 2rqu$$

(3') $$r^2 v = p^2(v - 2r) + 2rpu$$

i igualant i simplificant resulta

$$(q+p)(q-p)(v-2r) = 2ru(p-q),$$

que tenint present (1) es converteix en

$$2m(q-p)(v-2r) = 2ru(p-q);$$

com que P i Q són clarament diferents, $p \neq q$, i la igualtat anterior és equivalent a

$$m(v-2r) = -ru,$$

que és l'equació d'una recta que passa pel punt $(0, 2r)$ i té pendent $-r/m$. Les coordenades d'un punt variable sobre la recta són u, v, és a dir, les coordenades de P. En conclusió, P ha d'estar situat en el semiplà determinat per la recta s', paral·lela a s que passa per F i que no conté T; així el lloc geomètric demanat és la semirecta d'origen F paral·lela a IM.

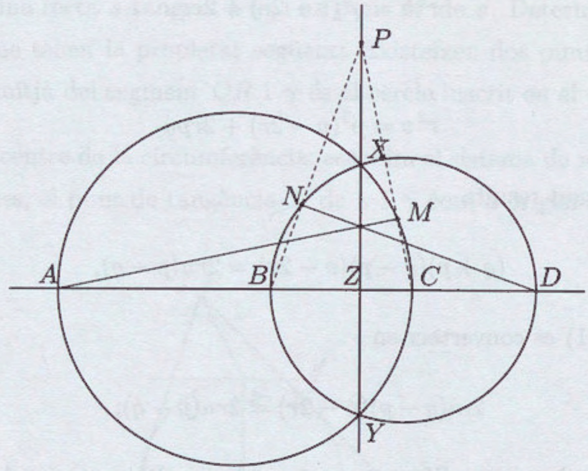
Problema 5. *(núm.1, IMO 1995, proposar per Bulgària.)* Siguin A, B, C i D quatre punts diferents sobre una recta, en aquest ordre. Les circumferències de diàmetres AC i BD es tallen en els punts X i Y. La recta XY talla BC en el punt Z. Sigui P un punt de la recta XY, diferent de Z. La recta CP talla la circumferèucia de diàmetre AC en els punts C i M, i la recta BP talla la circumferència de diàmetre BD en els punts B i N. Demostreu que les rectes AM, DN i XY són concurrents.

Solució (de Claude Deschamps, cap de la delegació francesa). Prenguem com a eix d'abscisses la recta que conté els quatre pnnts; com a eix d'ordenades la recta XY, l'origen a Z, i siguin els quatre punts

$$A(a,0),\ B(b,0),\ C(c,0),\ D(d,0).$$

Es compleix la relació

$$ac = bd = p$$



on p és la potència de Z respecte de cada una de les dues circumferències. Llavors l'equació de la circumferència de diàmetre AC és

$$x^2 + y^2 - (a + c)x + p = 0.$$

Sigui $P(0, \lambda)$, amb $\lambda \neq 0$. Les equacions paramètriques de la recta CP són

$$\left\{ \begin{aligned} x &= c(1 - t) \\ y &= t\lambda \end{aligned} \right. \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

i les coordenades de M són

$$t = \frac{c(c-a)}{c^2 + \lambda^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= c\frac{\lambda^2 + ac}{c^2 + \lambda^2} \\ y &= c\lambda\frac{c - a}{c^2 + \lambda^2}, \end{aligned} \right.$$

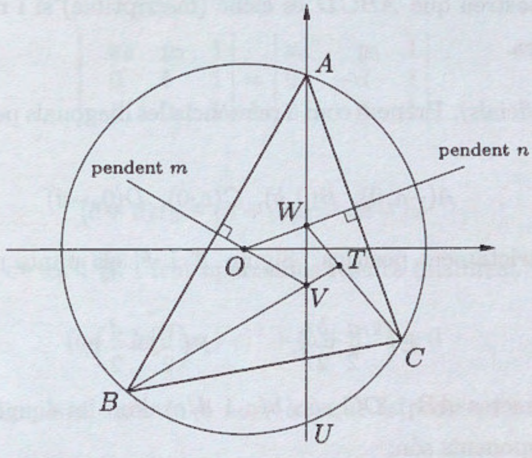
d'on l'equació de AM s'escriu

$$\begin{vmatrix} x & a & c\frac{\lambda^2+ac}{c^2+\lambda^2} \\ y & 0 & c\lambda\frac{c-a}{c^2+\lambda^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La intersecció d'aquesta recta amb l'eix XY s'obté posant $x = 0$, d'on resulta $y = -ac/\lambda$, és a dir, només depèn de p i la concurrència està assegurada.

Problema 6. *(núm. 2, IMO 1997, proposat per Anglaterra.)* L'angle A és el menor dels angles del triangle ABC. Els punts B i C divideixen la circumferència circumscrita del triangle en dos arcs. Sigui U un punt interior de l'arc BC (el que no conté A).
Les mediatrius de AB i AC tallen la recta AU en V i W, respectivament. Les rectes BV i CW es tallen a T.
Demostreu que $AU = TB + TC$.

Solució (dels coordinadors del problema, esquemàtica). Prenem el sistema de referència de tal manera que $A(0,1)$, $U(0,-1)$, $O(-\alpha,0)$, amb $\alpha > 0$, esseut O el centre de la circumferència. L'equació d'aquesta és $x^2 + y^2 + 2\alpha x - 1 = 0$.



Equacions de les rectes que intervenen en el problema:

$$OV : y = mx + \alpha,$$
$$AB : y = -\frac{1}{m}x + 1,$$
$$OW : y = n(x + \alpha),$$
$$AC : y = -\frac{1}{n} + 1.$$

Coordenades de B : $\left(\dfrac{2m(1-\alpha n)}{m^2+1}, \dfrac{2\alpha m + m^2 - 1}{m^2+1}\right)$.

Coordenades de C : $\left(\dfrac{2n(1-\alpha n)}{n^2+1}, \dfrac{2\alpha n + n^2 - 1}{n^2+1}\right)$.

Equació de BV : $y = \dfrac{x(m^2-1) + 2\alpha n^2}{2m}$.

Equació de CW : $y = \dfrac{x(n^2-1) + 2\alpha n^2}{2n}$.

Coordenades de T: $\left(\dfrac{-2\alpha mn}{mn+1}, \dfrac{\alpha(m+n)}{mn+1}\right)$.

Distància BT: $\left|\dfrac{\alpha(m-n)-mn-1}{mn+1}\right|$.

Distància CT: $\left|\dfrac{\alpha(m-n)+mn+1}{mn+1}\right|$

Sumant adequadament totes dues distàncies i observant que en ser T interior al cercle els sentits de BT i CT són oposats, resulta $BT + CT = 2$.

Problema 7. *(núm. 1, IMO 1998, proposat per Luxemburg.)* En el quadrilàter convex $ABCD$, les diagonals AC i BD són perpendiculars i els costats oposats AB i CD no són paral·lels. Suposem qne P, punt d'intersecció de les mediatrius de AB i DC, és interior al quadrilàter. Demostreu que $ABCD$ és cíclic (inscriptible) si i només si ABP i CDP tenen la mateixa àrea.

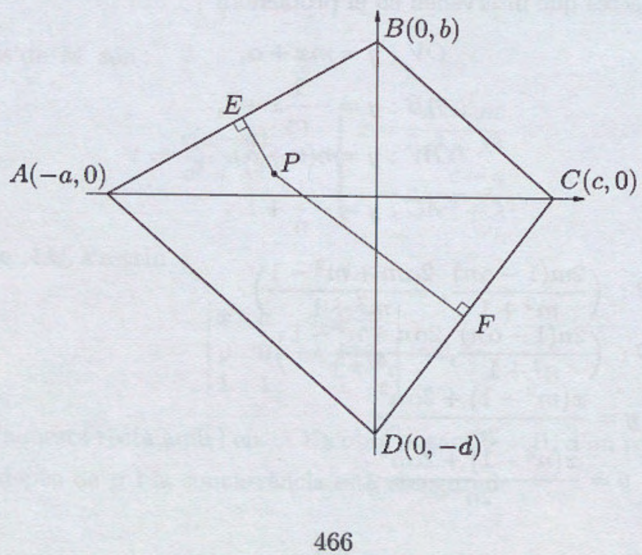
Solució (una de les oficials). Prenem com a referència les diagonals perpendiculars; suposem que

$$A(-a,0),\ B(0,b),\ C(c,0),\ D(0,-d)$$

amb a, b, c, d estrictament positius. Siguin E i F els punts mitjans de AB i DC, respectivament,

$$E\Big(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}\Big), \qquad F\Big(\frac{c}{2},-\frac{d}{2}\Big);$$

els pendents de les rectes AB i DC són b/a i d/c, d'on les equacions de les mediatrius dels segments corresponents són:



Mediatriu de AB : $2(ax+by)=b^2-a^2$,
Mediatriu de DC : $2(cx+dy)=c^2-d^2$.
Llavors, resolent el sistema format per les dues equacions anteriors, obtenim les coordenades del punt d'intersecció $P(x_0,y_0)$,

$$x_0=\frac{d(b^2-a^2)-b(c^2-d^2)}{2(ad-bc)},$$
$$y_0=\frac{a(c^2-d^2)-c(b^2-a^2)}{2(ad-bc)}.$$

Com que els triangles PBA i PDC tenen la mateixa orientació, la igualtat d'àrees s'escriu (mitjançant determinants, per exemple)

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ 0 & -d & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

que es transforma en

$$(b+d)x_0-(a+c)y_0=cd-ab$$

i substituint els valors de x_0 i y_0 i fent operacions resulta finalment

$$(ac-bd)\left[(a+c)^2+(b+d)^2\right]=0$$

així que les àrees són iguals si i només si $ac=bd$, que és precisament la condició perquè $ABCD$ sigui cíclic.

Problema 8. *(núm. 5, IMO 1998, proposat per Ucraïna.)* Sigui I l'incentre del triangle ABC. La circumferència inscrita és tangent a BC, CA i AB en K, L i M, respectivament. La paral·lela per B a MK talla LM i LK en R i S, respectivament. Demostreu que $\widehat{RIS}$ és un angle agut.

Solució (de Mircea Becheanu, cap de la Delegació de Romania). Observem en primer lloc que la condició de l'enunciat es pot escriure com

$$\widehat{RIS} \text{ agut} \Longleftrightarrow RI^2+IS^2-RS^2>0$$

pel teorema del cosinus en el triangle RIS. Però com que $RS=RB+BS$, la desigualtat anterior equival a

$$IR^2+IS^2-RB^2-SB^2-2RB\cdot SB>0.$$

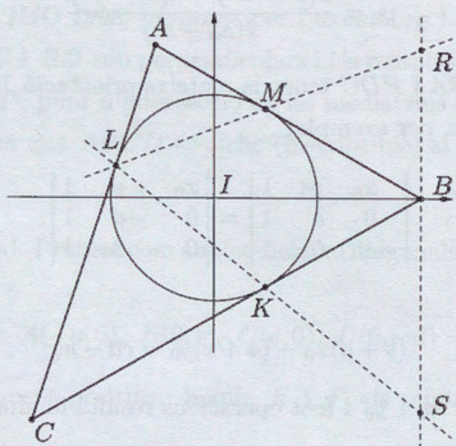
Com que BI és perpendicular a KM, resulta que BI és perpendicular a RS i d'aquí que

$$IR^2 - RB^2 = IB^2, \qquad IS^2 - BS^2 = IB^2,$$

per tant,

$$\widehat{RIS} \text{ agut} \iff IB^2 > RB \cdot SB.$$

Passem, ara, a demostrar la proposició del problema utilitzant coordenades.



Considerem el cercle inscrit amb centre en l'origen $I(0,0)$, i radi 1, i un sistema de coordenades en el qual $M(a,b)$ i $K(a,-b)$ pertanyin al cercle. Llavors $a^2+b^2=1$.
Les equacions de les tangents al cercle en M i en K són, respectivament,

(1) $$xa + yb = 1,$$

(2) $$xa - yb = 1.$$

La intersecció de (1) amb OX dóna el punt $B(1/a, 0)$. Sigui $L(a_1, b_1)$ un punt arbitrari del cercle, $a_1^2 + b_1^2 = 1$.
L'equació de la recta LM és

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

fent $x = 1/a$ es calcula l'ordenada de R

$$y_R = \frac{1}{(a-a_1)}\left[\frac{1}{a}(b-b_1) + (ab_1 - a_1 b)\right].$$

Anàlogament, fent $x = 1/a$ en l'equació de LK es calcula l'ordenada de S

$$y_S = \frac{1}{(a-a_1)}\left[\frac{1}{a}(b-b_1) + (ab_1 + a_1 b)\right].$$

Per l'observació inicial, hem de demostrar que $IB^2 > RB \cdot SB$, és a dir, que

$$\frac{1}{a^2} > |y_R \cdot y_S| \qquad (3)$$

i això s'escriu com

$$\frac{1}{a^2} > \frac{b^2}{a^2(a-a_1)^2}\left|(1-aa_1)^2 - b^2 b_1^2\right|$$

és a dir,

$$(a-a_1)^2 > b^2\left|(1-aa_1)^2 - (1-a^2)(1-a_1^2)\right|$$

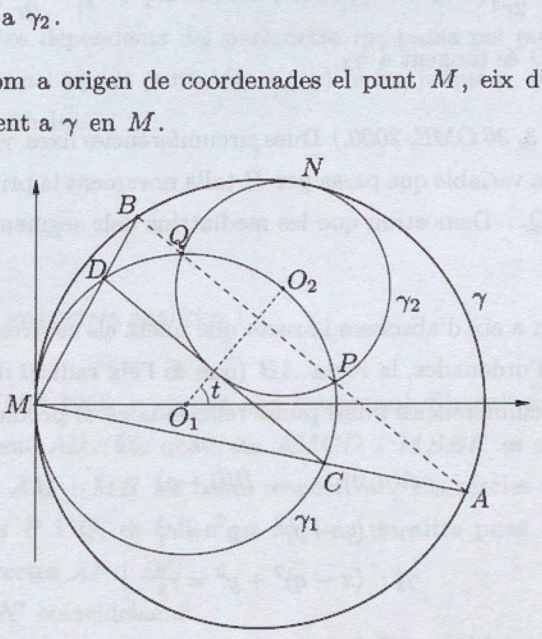
$$(a-a_1)^2 > b^2|1 - 2aa_1 + a^2a_1^2 - 1 + a^2 + a_1^2 - a^2a_1^2|$$

$$(a-a_1)^2 > b^2(a-a_1)^2$$

que és tant com dir $1 > b^2$, que efectivament és certa.

Problema 9. *(núm. 5, IMO 1999, proposat per Rússia.)* Dues circumferències γ_1 i γ_2, estan contingudes en l'interior de la circumferència γ, i són tangents a γ en M i N, respectivament. γ_1 passa pel centre de γ_2. La recta que passa pels dos punts d'intersecció de γ_1 i γ_2 talla γ en A i B. MA i MB tallen γ_1 en C i D, respectivament. Demostreu que CD és tangent a γ_2.

Solució. Prenem com a origen de coordenades el punt M, eix d'abscisses MO_1, i eix d'ordenades la tangent a γ en M.



Les coordenades de O_1 són $(r_1, 0)$, i l'equació de γ_1 és $(x-r_1)^2+y^2=r_1^2$; les coordenades de O_2 són, anomenant $t=\widehat{OO_1O_2}$, $(r_1+r_1\cos t, r_1\sin t)$, així que l'equació de γ_2 serà $(x-r_1-r_1\cos t)^2+(y-r_1\sin t)^2=r_2^2$.

L'equació de AB és la de l'eix radical de γ_1 i γ_2, que obtenim restant les equacions de les dues circumferències

$$2xr_1\cos t+2yr_1\sin t=2r_1^2-r_2^2+2r_1^2\cos t.$$

L'homotècia de centre en M que transforma γ en γ_1 té raó r/r_1; per tant, l'equació de CD, transformada de AB per aquesta homotècia, s'obtindrà simplement multiplicant el coeficient de x i el de y per la raó

$$2rx\cos t+2ry\sin t=2r_1^2-r_2^2+2r_1^2\cos t.$$

Ara bé, el teorema del cosinus en el triangle OO_1O_2 permet escriure

$$\cos t=\frac{O_1O^2+O_1O_2^2-OO_2^2}{2OO_1\cdot O_1O_2}=\frac{2r_1^2-2rr_1+2rr_2-r_2^2}{2(r-r_1)r_1}$$

i llavors la distància de O_2 a la recta CD es calcula en funció dels radis

$$\mathrm{d}\,(O_2,CD)=\frac{1}{2r}\left|\left(2rr_1-2r_1^2\right)\cos t+2rr_1-2r_1^2+r_2^2\right|=\frac{1}{2r}\,|2rr_2|=r_2$$

d'on, efectivament, CD és tangent a γ_2.

Problema 10. *(núm. 3, 36 OME, 2000.)* Dues circumferències fixes γ_1 i γ_2 es tallen en els punts A i B. Una recta variable que passa per B talla novament la primera circumferència en P_r i la segona en Q_r. Demostreu que les mediatrius dels segments P_rQ_r passen per un punt fix.

Solució. Prendrem com a eix d'abscisses la recta que uneix els centres de les dues circumferències, i com a eix d'ordenades, la recta AB (que és l'eix radical de les dues). Llavors les equacions de les circumferències i dels punts rellevants en el problema són

$$A(a,0), \qquad B(0,-a)$$
$$\gamma_1:\ (x-p)^2+y^2=r_1^2$$
$$\gamma_2:\ (x-q)^2+y^2=r_2^2$$

i l'equació de la recta variable per B és $y+a=mx$.

Les relacions entre a, p, q i els radis són

$$p^2 + a^2 = r_1^2, \qquad q^2 + a^2 = r_2^2.$$

Les coordenades de P_r i Q_r són

$$P_r : \left(\frac{2(p+ma)}{1+m^2}, \frac{2mp + a(m^2-1)}{1+m^2}\right),$$

$$Q_r : \left(\frac{2(q+ma)}{1+m^2}, \frac{2mq + a(m^2-1)}{1+m^2}\right).$$

D'aquí s'obté l'equació de la mediatriu de P_rQ_r

$$y - \frac{m(p+q) + a(m^2-1)}{1+m^2} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p+q+2ma}{1+m^2}\right)$$

que es transforma, en fer operacions, en

$$(m^2+1)(p+q) + am(m^2+1) - m(1+m^2)y - (1+m^2)x = 0,$$

és a dir, en

$$(p+q-x) + m(a-y) = 0$$

i aquest feix de rectes dependents del paràmetre m, passa pel punt d'intersecció de les rectes $x = p+q$, $y = a$ i aquest punt $M(p+q, a)$ és fix, ja que p, q, a depenen dels radis de les dues circumferències.

Problemes

(Per a resoldre amb geometria analítica.)

GA1. *(núm. 5, IMO 1959, proposat per Romania.)* S'escull un punt arbitrari M a l'interior d'un segment AB. Els quadrats $AMCD$ i $MBEF$ es construeixen al mateix costat de AB, sent AM i MB les bases respectives. Els cercles circumscrits a aquests quadrats, de centres P i Q, es tallen en M i en un altre punt N. Sigui N' el punt d'intersecció de les rectes AF i BC.

a) Proveu que N i N' coincideixen.

b) Proveu que les rectes MN passen per un fix S, independent de l'elecció de M.

c) Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans dels segments PQ quan M varia entre A i B.

GA2. *(núm. 6, IMO 1961, proposat per Romania.)* Es considera un pla π i tres punts no alineats A, B, C a un mateix costat de π; suposem que el pla determinat pels tres punts no és paral·lel a π. Al pla π es prenen tres punts arbitraris A', B', C'. Siguin L, M, N els punts mitjans dels segments AA', BB' i CC'. Sigui G el baricentre del triangle LMN. (No es consideren posicions de A', B', C' tals que L, M i N no formin triangle). Quin és el lloc geomètric de G quan A', B', C' varien independentment sobre π?

GA3. *(núm. 1, IMO 1997, proposat per Holanda.)* Es construeixen, a l'interior del quadrat $ABCD$, els triangles equilàters ABK, BCL, CDM i DAN. Demostreu que els punts mitjans dels quatre segments KL, LM, MN, NK, i els punts mitjans dels vuit segments AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN, són els vèrtexs d'un dodecàgon regular.

GA4. *(núm. 2, IMO 1978, proposat pels Estats Units.)* Sigui P un punt donat a l'interior d'una esfera donada. Tres raigs mútuament perpendiculars que surten de P tallen l'esfera en els punts U, V i W; el punt Q és el vèrtex diagonalment oposat a P en el paral·lelepípede determinat per PU, PV i PW. Trobeu el lloc geomètric de Q per totes les ternes de raigs mútuament perpendiculars i d'origen P.

GA5. *(Olimpíada del Canadà, 1994.)* El triangle ABC és acutangle. Sigui AD l'altura des de A, i H un punt qualsevol interior a AD. La recta BH talla el segment AC al punt E i la recta CH talla el segment AB al punt F. Demostreu que $\widehat{EDH} = \widehat{HDF}$.

GA6. *(Olimpíada Matemàtica Espanyola, 1995.)* Al triangle ABC, rectangle a A, els punts M i N són els peus de les bisectrius interiors dels angles B i C, respectivament; i D és el peu de l'altura des de A. Si O és el punt d'intersecció de AD i MN, demostreu que $AO = r$, el radi del cercle inscrit a ABC.

Alguns comentaris finals

1.- El problema 2 havia estat proposat a la revista suïssa *Elemente der Mathematik*, vol 2, n 3, 1947, p 68, per E. Voellmy. Entre les cinc persones que el van resoldre en aquella època, hi havia el veterà Cap de la Delegació de Luxemburg a la IMO d'Austràlia. Realment, era molt improbable que entre els membres del Jurat presents a Austràlia, n'hi hagués cap que recordés un problema publicat 40 anys abans en una revista en llengua alemanya.

2.- Potser ens sorprengui que un problema sigui proposat per dos països, com el cas del problema 3. En realitat, cada país havia proposat només una meitat de la doble implicació de l'enunciat. El Comitè de problemes de Hong Kong (on es va celebrar la IMO de 1994), presidit per Andy Liu, va refondre els dos enunciats en un de sol.

3.- Del problema 6, original del britànic Chistopher Bradley, no se'n va conèixer cap solució analítica fins que l'equip de coordinadors d'aquest problema a Mar del Plata, que comandava Angelo Barone Netto, del Brasil, la va fer conèixer als Caps de Delegació. Es va sospitar que algun concursant intentaria fer-lo d'aquesta forma, i van decidir d'arribar fins al final, per tal de poder adjudicar punts a les solucions analítiques parcials.

4.- La solució del problema 8 és similar a l'obtinguda durant la IMO 1998 a Taiwan per Jaime Vinuesa del Río, que aconseguí una medalla de bronze.

5.- El problema 9 admet solucions sintètiques molt boniques; si s'intenta trobar les coordenades dels quatre punts A, B, C i D, els càlculs es compliquen en excés.

6.- El problema 10 va ser un dels que van marcar diferències a la fase nacional de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola de 2000, celebrada a Palma de Mallorca; altres sistemes de referència elegits condueixen a situacions més complicades.

7.- En el problema GA5, proposat sense solució, si H és l'ortocentre s'obté un resultat conegut (temo que per poca gent): les altures d'un triangle acutangle són les bisectrius del triangle òrtic.